Η διδακτική αξιοποίηση του λογισμικού Sketchpad στην διδασκαλία των Γεωμετρικών Απεικονίσεων στο επίπεδο.

Περίληψη: Η εργασία αυτή υπάγεται στην θεματική ενότητα 04

Ο δάσκαλος των Μαθηματικών στο περιβάλλον της τάξης, καλείται να εντάξει στην διδασκαλία του εκπαιδευτικά μαθηματικά λογισμικά, αλλάζοντας ριζικά τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας του, καθώς το περιβάλλον των λογισμικών, είναι συνήθως σχεδιασμένο σε νέες παιδαγωγικές θεωρήσεις της διδασκαλίας (Εποικοδομισμός , Ανακαλυπτική μάθηση). Παραστατικότητα, κίνηση, πειραματισμός και διερεύνηση είναι στοιχεία που προάγονται από το λογισμικό, άρα και η διατύπωση εικασιών, η ανακαλυπτική μάθηση και τελικά το κτίσιμο της γνώσης από τον ίδιο τον μαθητή. Στα πλαίσια αυτά, δραστηριότητες και ασκήσεις διαφοροποιούνται ποιοτικά από τις παραδοσιακές προσεγγίσεις. Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο την ανάδειξη αυτών των προσεγγίσεων μέσα από ένα ιδιαίτερα επιτυχημένο δυναμικό εκπαιδευτικό λογισμικό, επιδιώκοντας την εξοικείωση των δασκάλων των μαθηματικών με την φιλοσοφία των νέων μαθηματικών δυναμικών εργαλείων σε σχέση με το κεφάλαιο των Γεωμετρικών απεικονίσεων.

Yiannis P. Plataros *M.Edu, teacher of Mathematics*

Abstract: The mathematics teacher in the classroom environment, is required to integrate to his teaching of math education software, radically changing the traditional way of teaching, as the environment of software is usually designed with a new pedagogical approach of learning (constructivism, discovery learning) . Figuration, movement,

experimentation and exploration are elements promoted by the software, and therefore the conjecturing, discovery learning, and eventually the building of knowledge by the pupils. In this context, activities and exercises differ qualitatively from the traditional approaches. This paper aims to highlight these approaches through a highly successful educational software resources, seeking to familiarize teachers with the mathematical concept of new dynamic mathematical tools in relation to the chapter of Geometric depictions.

Εισαγωγή: Τα δυναμικά εκπαιδευτικά Μαθηματικά λογισμικά, έχουν επαναφέρει στο ορατό μαθηματικό γίγνεσθαι τον πειραματισμό και την κίνηση, ενώ έχουν προάγει την εποπτεία και την διερεύνηση σε απίστευτο βαθμό, σε σχέση πάντα με τα κρατούντα στην μαθηματική κοινότητα. Τα λογισμικά αυτά διαχέονται σε πολλές ενότητες, ενώ κάποιες τις αναδεικνύουν προνομιακά. Το sketchpad v4.07, είναι ένα πλήρως εξελληνισμένο δυναμικό εκπαιδευτικό Γεωμετρικό λογισμικό που μπορεί να χρησιμοποιηθεί νομίμως σε όλα τα Ελληνικά σχολεία δημόσια και ιδιωτικά. Υποστηρίζει την διδασκαλία της Ευκλειδείου Γεωμετρίας ενώ παράλληλα μπορεί να την διασυνδέει με την Ανάλυση, αφού μπορεί ένα μέγεθος (μήκος , μέτρο γωνίας ή τόξου , εμβαδόν) να μεταβάλλεται σε πραγματικό χρόνο και να παριστάνεται η γραφική του παράσταση είτε ως συνάρτηση του χρόνου, είτε ως συνάρτηση οποιασδήποτε αλγεβρικής έκφρασης, ευνοώντας την διερεύνηση και τον πειραματισμό.

Οι ειδικές δυνατότητες του εργαλείου: Η πλήρης αξιοποίηση των δυνατοτήτων του λογισμικού γίνεται στους Γεωμετρικού τόπους , όπως και στις Γεωμετρικές απεικονίσεις, στο πραγματικό ή μιγαδικό επίπεδο. Το αρχέτυπο σημείο Α με συντεταγμένες (χ,ψ) , απεικονίζεται στην εικόνα του Β με συντεταγμένες (χ΄, ψ΄) , όπου γενικώς χ΄=φ(χ,ψ) και ψ΄=θ(χ,ψ) ,με φ και θ συναρτήσεις των χ,ψ, γραμμικές ή μη. Όταν η απεικόνιση γίνεται με γεωμετρική κατασκευή του Β, προφανώς οι συντεταγμένες του Β ως συνάρτηση των συντεταγμένων του Α, είναι ζητούμενες. Καθώς κινείται το Α, κινείται και το Β και το λογισμικό παρέχει τις παρακάτω δυνατότητες:

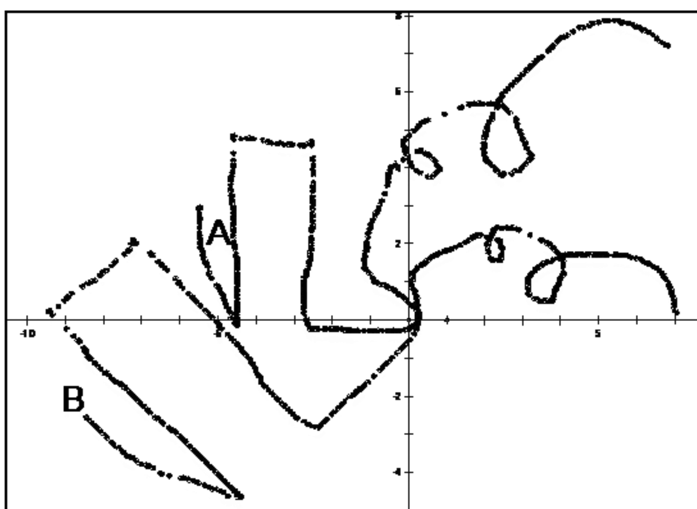
i) Το Α κινείται ελεύθερα στο επίπεδο και -αναλόγως της συναρτήσεως- η εικόνα του Β.

ii) Το Α κινούμενο ελευθέρως, διαγράφει ίχνος τροχιάς και ομοίως διαγράφει ίχνος το Β. (βλέπε σχήματα 1 και 2)

iii) Το Α κινείται επί ευθείας ή ευθυγράμμου τμήματος ή επί πολυγώνου ή επί κύκλου ή επί οποιασδήποτε γραφικής παραστάσεως και το Β διαγράφει τον αντίστοιχο γ.τ. Τα σχήματα επί των οποίων κινείται το Α, μπορούν να υποστούν δυναμικό χειρισμό (στροφή, μεταφορά, αλλαγή περιμέτρου, διαστάσεων, αυξομείωση πλευρών , παραμόρφωση σχήματος) και αυτομάτως και η εικόνα τους μέσω της αντιστοίχισης

Όλες οι αλγεβρικές εκφράσεις επιδέχονται παραμέτρους οι οποίες δύνανται με κατάλληλο μεταβολέα, να διατρέχουν κατάλληλο υποσύνολο του R, όπου η εικόνα του αρχετύπου φαίνεται ότι μεταβάλλεται ταυτοχρόνως με την μεταβολή της παραμέτρου.

.

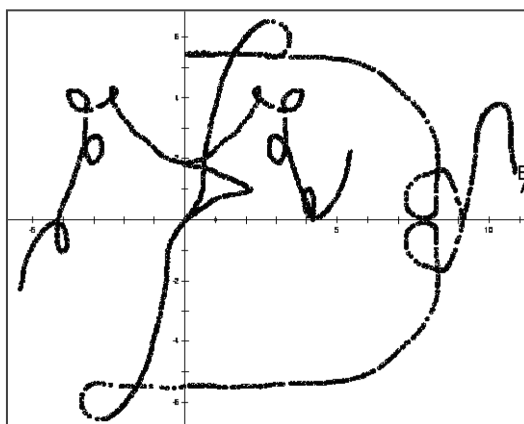


Σχήμα 1: Μια απεικόνιση, όπου φαίνεται να είναι μεγέθυνση με στροφή και σχεδιάζεται με ελεύθερη κίνηση του Α.

Η νέα οπτική προσέγγισης των γεωμετρικών απεικονίσεων: Οι δυνατότητες που παρέχει το εργαλείο, τουλάχιστον για όποιον έρχεται πρώτη φορά σε επαφή με αυτές, είναι εντυπωσιακές, αλλά και καινοτόμες ως προς την διδασκαλία, αφού στην Πατρίδα

μας, έχουν αρχίσει να γίνονται γνωστές τα τελευταία 15 χρόνια , χωρίς όμως να έχουν διεισδύσει ακόμα όσο –ίσως- θα επιθυμούσαμε στην εκπαιδευτική διαδικασία. Αρκετά διδακτικά πλεονεκτήματα προσέγγισης της έννοιας των γεωμετρικών απεικονίσεων μπορούν να φανούν με τα παρακάτω επιλεγμένα παραδείγματα δραστηριοτήτων, αν και κάποια δεν αποτελούν πλέον μέρος του Αναλυτικού προγράμματος στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση:

Παράδειγμα1 :Σε ένα αρχείο του Sketchpad, κατασκευάζουμε την απεικόνιση Α(χ,ψ)→Β(|χ|,|ψ|) , την συναρτησιακή σχέση της οποίας αποκρύπτουμε και καλούμε τους μαθητές να την μαντέψουν, διερευνώντας τις θέσεις του Β στο επίπεδο, μεταβαλλόμενου του Α. Ουσιαστικά πρέπει οι μαθητές **να παρατηρήσουν** ότι καθώς το Α κινείται σε όλο το επίπεδο, η εικόνα του κινείται μόνο στο 1^{ο} τεταρτημόριο, ότι καθώς το Α κινείται πάνω στους άξονες ομοίως και η εικόνα του, ότι υπάρχουν συμμετρίες ως προς άξονες και ως προς την αρχή τους. Η δραστηριότητα αυτή, αφορά ουσιαστικά ένα ανοικτό πρόβλημα. Είναι διαπιστωμένο, ότι η εμπλοκή των μαθητών με ένα ανοικτό πρόβλημα που απαιτεί διερεύνηση και πειραματισμό, ενισχύει από τη μεριά τους την δημιουργία εικασιών και τον έλεγχό τους, την διατύπωση κανόνων και γενικεύσεων, την αξιοποίηση ενός μεγάλου εύρους και ποικιλίας γνώσεων και εμπειριών μέσω των οποίων αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος.[4] Η δραστηριότητα, ανάλογα με το γνωστικό επίπεδο των μαθητών, μπορεί να επεκταθεί στην ερμηνεία όταν η εικόνα έχει την μορφή Β(|χ-3|,|ψ+2|) ή Β(|χ|+3,|ψ|+2) πότε ταυτίζονται οι εικόνες κτλ .



Σχήμα 2: Η απεικόνιση των συντεταγμένων στις απόλυτες τιμές τους, δίνει μια ενδιαφέρουσα δραστηριότητα.

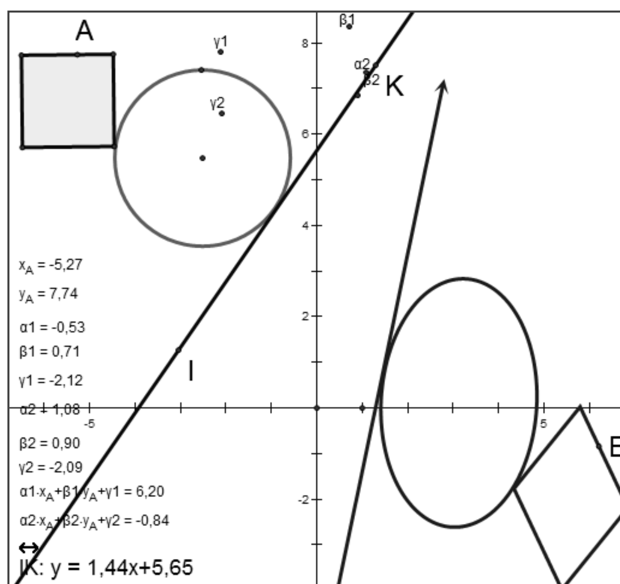
Διδακτικά πλεονεκτήματα της προσέγγισης: α) Συνεχής παρατήρηση και πειραματισμός που δεν μπορεί να γίνει με στατικά μέσα. β)διερμηνεία της κίνησης σε αλγεβρική σχέση των συντεταγμένων. Αυτό επίσης δεν μπορεί να γίνει με στατικά μέσα. γ) Η όλη δραστηριότητα δημιουργεί μια

αμφίδρομη ερμηνεία μεταξύ γεωμετρικής και αλγεβρικής έκφρασης γεγονός που προάγει την διασύνδεση μεταξύ πολλαπλών αναπαραστάσεων μιας έννοιας.

Παραδειγμα 2: Στις ομοπαραλληλικές απεικονίσεις του επιπέδου, έχουμε Α(χ,ψ)→Β(χ΄, ψ΄) με

$$\chi' = \alpha_1\chi + \beta_1\psi + \gamma_1$$
$$\psi' = \alpha_2\chi + \beta_2\psi + \gamma_2 \quad \mu\varepsilon \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

με α_i, β_i, γ_i πραγματικούς. Η χαρακτηριστική ιδιότητα όλων, είναι ότι «διατηρούν τις ευθείες» (δηλ. μια ευθεία απεικονίζεται πάντα σε ευθεία) και εδώ ανήκουν οι πιο γνωστοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί όπως η αξονικές συμμετρίες (κατοπτρισμοί) κεντρικές συμμετρίες, οι παράλληλες μεταφορές, οι στροφές και οι ομοιοθεσίες. Με το δυναμικό εργαλείο, ο διδασκόμενος, μπορεί:



Σχήμα 3: Στο απεικονίζον σημείο Α, μπορεί να προσαρτηθεί οποιοδήποτε γεωμετρικό σχήμα και να βρεθεί ο γ.τ. του Β, καθώς το Α διαγράφει την περίμετρο του σχήματος.

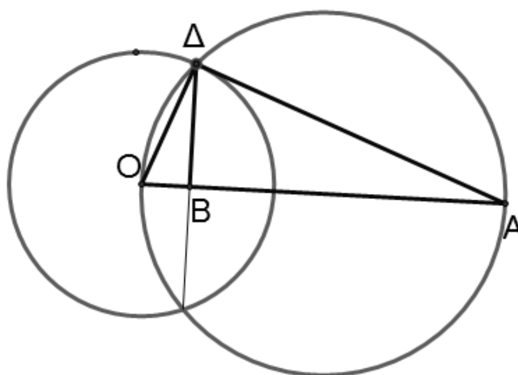
1)Να μεταβάλλει μία – μία κατά το δοκούν τις παραμέτρους α_i, β_i, γ_i , και να παρατηρεί τις μεταβολές.
2)Να προσαρτά στο Α οποιοδήποτε σχήμα (Σχήμα 3) και να βρίσκει τον γ.τ. του Β. Στην συνέχεια, η ευθεία-αρχέτυπο, μπορεί να μετακινείται παράλληλα με τον εαυτό της ή να περιστρέφεται και να παρακολουθείται η κίνηση της αντίστοιχης εικόνας. Ομοίως μπορεί να αυξομειώνεται η ακτίνα του κύκλου, να μετακινείται το κέντρο του και να παρακολουθούνται οι

αντίστοιχες αλλαγές, όπως και με το τετράγωνο, το οποίο μπορεί να μεταβάλλει μήκος πλευράς καθώς και να μετακινείται.

Διδακτικά πλεονεκτήματα: α) Φαίνεται, ότι η τιμή 0 της ορίζουσας για την οποία όλα τα σχήματα απεικονίζονται σε ευθεία, δεν είναι απλώς μια τιμή που εξαιρείται για αλγεβρικούς λόγους, αλλά ότι είναι μια οριακή τιμή μιας συνεχούς προοδευτικής μεταβολής, όπου το επίπεδο φαίνεται να συμπιέζεται σε ευθεία. Αυτό επιτυγχάνεται με την μεταβολή των $α_i$, $β_i$, όπου τα απεικονιζόμενα σχήματα φαίνονται να «συμπιέζονται» σε μια ευθεία ή να «φουσκώνουν» αναλόγως με τις τιμές των $α_i$, $β_i$.

β)Παρέχεται και εδώ πολύ μεγάλη δυνατότητα πειραματισμού παρατήρησης και διερεύνησης με κάθε σχήμα που θα επιθυμήσει (και είναι κατασκευαστό) ο μαθητής.

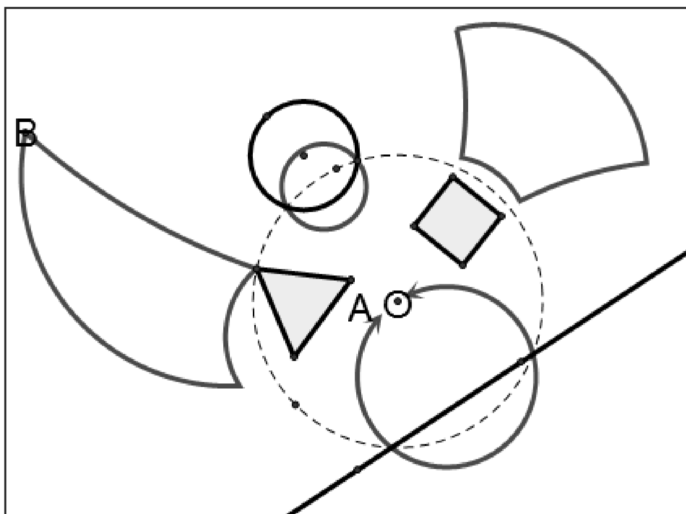
Παράδειγμα 3: Στην Αντιστροφή ως προς κύκλο, έχω Α(χ,ψ)→Β(χ΄,ψ΄) όπου το Β προκύπτει από το Α με την εξής διαδικασία: Όταν το Α είναι εκτός του κύκλου, φέρουμε εφαπτόμενη προς τον κύκλο, την ΑΔ, έπειτα την ακτίνα ΟΔ και ακολούθως την $ΔΒ \perp ΟΑ$ (σχήμα 4) Έτσι, κάθε σημείο του επιπέδου εκτός κύκλου, απεικονίζεται εσωτερικά του κύκλου. Ομοίως, με την αντίστροφη διαδικασία, κάθε σημείο στο εσωτερικό του κύκλου απεικονίζεται εξωτερικά του και κάθε σημείο επί του κύκλου στον εαυτό του. Το Ο, απεικονίζεται σε ένα φανταστικό σημείο στο άπειρο(δεν απεικονίζεται δηλ. σε σημείο συγκεκριμένο) . Οι συντεταγμένες του Β, βρίσκονται με την βοήθεια του γνωστού θεωρήματος του Ευκλείδη *που λέει, ότι «Το τετράγωνο εκάστης κάθετης πλευράς ορθογωνίου τριγώνου, ισούται με την υποτείνουσα επί την προβολή της επί ταύτην»* Έτσι λαμβάνουμε για στο καρτεσιανό σύστημα



Σχήμα 4: Στην Αντιστροφή ως προς κύκλο, το Α απεικονίζεται στο Β εσωτερικά του κύκλου και κάθε Β εσωτερικά του κύκλου(πλην του Ο) εκτός, στο Α , ενώ κάθε σημείο του κύκλου στον εαυτό του . Το Ο θεωρείται ότι απεικονίζεται σε κάποιο φανταστικό σημείο στο άπειρο.

συντεταγμένων, $\chi' = \dfrac{\chi \cdot \rho^2}{\chi^2 + \psi^2}$, $\psi' = \dfrac{\psi \cdot \rho^2}{\chi^2 + \psi^2}$, (1) όπου ρ το μήκος της ακτίνας του κύκλου και Ο η αρχή των αξόνων.

Η αντιστροφή, είναι μια σπουδαίας σημασίας γεωμετρική απεικόνιση με γόνιμα αποτελέσματα στην επίλυση δύσκολων προβλημάτων (λ.χ. Απολλώνιο Πρόβλημα επαφής) [2],[3] ή στην κατασκευή εικόνας σε κοίλο ή κυρτό κάτοπτρο κ.ά. [2] Με όπλο το Sketchpad, μπορούμε εκμεταλλευόμενοι τις δυνατότητές του, να προσεγγίσουμε την σπουδαία αυτή απεικόνιση με εντελώς ανακαλυπτικό τρόπο. Αφού ο μαθητής κατασκευάσει την απεικόνιση, μπορεί να κάνει ισχυρές εικασίες σχετικά με τις ιδιότητες της απεικόνισης, τις οποίες φυσικά στην συνέχεια θα κληθεί να αποδείξει Οπωσδήποτε όμως, υπάρχει πειραματισμός, ανάπτυξη ισχυρών εικασιών, τεράστια ευχέρεια διερεύνησης, καθώς στο Α μπορούν να προσαρτηθούν ευθεία, κύκλος, τετράγωνο, και γενικά οποιαδήποτε καμπύλη, όλα δυναμικά μεταβαλλόμενα και να λαμβάνω κάθε φορά τις εικόνες τους.



Σχήμα 5: Ο κύκλος με την διακεκομμένη γραμμή είναι ο κύκλος αντιστροφής, τα σχήματα με τα πιο μαύρα περιγράμματα τα αρχέτυπα , ενώ τα πιο γκρίζα σχήματα, οι εικόνες τους.

Η δυναμική διερεύνηση μπορεί να αναδείξει τις εικασίες:

α) Ότι η εικόνα ευθείας είναι κύκλος και στην περίπτωση που η ευθεία διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής είναι ο εαυτός της. β) Ότι η εικόνα κύκλου είναι κύκλος, εκτός από την περίπτωση που ο κύκλος

διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής, οπότε είναι ευθεία. γ) Η εικόνα - ευθεία φαίνεται να είναι οριακή περίπτωση κύκλου με άπειρη ακτίνα.

Τα παραπάνω, προκύπτουν άμεσα με σχετική ευκολία. Στην συνέχεια, οι εικασίες μπορούν να ελεγχθούν με την άλγεβρα και την αναλυτική Γεωμετρία. Μάλιστα, οι αρχικές εικασίες μπορούν να γίνουν πιο ακριβείς, καθώς το Ο φαίνεται να μην έχει εικόνα και αυτό να προκαλέσει τον μαθητή για την αλγεβρική ερμηνεία (μηδενίζεται ο παρονομαστής των κλασμάτων της (1))

Διδακτικά πλεονεκτήματα: Με την τεράστια ευχέρεια πειραματισμού και διερεύνησης που παρέχει το εργαλείο, ο μαθητής παράγει πρώτα τις εικασίες, τις ισχυροποιεί, διατυπώνει τις προτάσεις που θα αποδείξει και ενδεχομένως αναδιατυπώνει ορισμένες αστοχίες. Το ίδιο αποτέλεσμα με στατικά μέσα απαιτεί τεράστια δυσκολία , χρόνο, ενώ αυτός που θα κληθεί να εικάσει προτάσεις θα πρέπει να έχει μεγάλη μαθηματική ικανότητα, όλα αυτά, πρακτικά απαγορευτικά για μαθητές.

Γενικά Διδακτικά Συμπεράσματα: 1) Η κατάλληλη χρήση των δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών, μπορεί να δημιουργήσει μαθηματικές εικασίες τις οποίες στην συνέχεια καλούνται οι μαθητές να αποδείξουν.

2) Η διαδικασία του σχήματος : Πειραματίζομαι→Εικάζω→Ελέγχω τις εικασίες μου→Διορθώνω τις εικασίες και τις επαναδιατυπώνω , ανήκει στο μοντέλο της μαθηματικής ανακάλυψης του Lakatos. [5] Αυτή η πραγματική ερευνητική διαδικασία αντιστοιχίζεται στην επαν-ανακάλυψη της μαθηματικής γνώσης και ανήκει στην θεωρία του J. Bruner που θεωρεί ότι η μάθηση συντελείται με ανακαλυπτικές διαδικασίες (καθοδηγούμενη ανακάλυψη, προσομοίωση ανακάλυψης) [6]

3) Στο παράδειγμα 2 , δίνεται η ευκαιρία να διασαφηνιστεί η έννοια «παράμετρος» και «μεταβλητή», καθώς η μεταβολή μιας εκάστης παραμέτρου από τις $α_i$, $β_i$, μεταβάλει ολόκληρο το απεικονιζόμενο σχήμα, ενώ η μεταβολή της «μεταβλητής» (εδώ το σημείο (χ,ψ)) καθορίζει το σχήμα. Παράλληλα, η έννοια του «αγνώστου» μπορεί να αναδειχθεί μέσω ενός ερωτήματος λ.χ. του τύπου «βρείτε ένα σημείο που να απεικονίζεται στον εαυτό του, ποία άλλα τέτοια σημεία υπάρχουν;»

3) Η διαδικασία μετάφρασης και ερμηνείας της οπτικής αναπαράστασης σε άλγεβρα και αντιστρόφως, προάγει την πολλαπλή αναπαράσταση των εννοιών, εδώ των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Γεωμετρική και Αλγεβρική γλώσσα συνυπάρχουν και είναι ανταλλάξιμες με ένα συμπληρωματικό και ταυτόχρονα εποικοδομητικό τρόπο.[1]

4) Επάγονται προς απόδειξη απειροστικές διαδικασίες, καθώς η εικόνα της ευθείας ψ=αχ+β , όταν β→0 δίνει ακτίνα της εικόνας –κύκλου R→ ∞

5) Στο μιγαδικό επίπεδο με ανάλογες πρακτικές, μπορεί να παρασταθεί οποιαδήποτε απεικόνιση z→f(z).

6) Το ίδιο το εργαλείο, χαρακτηρίζεται ως «ερευνητικό» και για τους μαθηματικούς που κάνουν έρευνα στην Γεωμετρία (Ευχερής ανάπτυξη εικασιών και γρήγορος έλεγχός τους) Ταυτόχρονα είναι και εκπαιδευτικό εργαλείο για την «καθοδηγούμενη ανακάλυψη» εκ μέρους των μαθητών. Το γεγονός αυτό είναι αρκετά ενδιαφέρον, καθώς η ερευνητική άσκηση μπορεί να γίνεται με το ίδιο ή παρεμφερές μέσον για όλους.

Όλα τα παραπάνω, αλλάζουν σημαντικά την προσέγγιση της μαθηματικής γνώσης, καθώς η κατασκευή της, συνδέεται στενά με την χρήση των εργαλείων. Ταυτόχρονα, φαίνεται ότι η χρήση της τεχνολογίας, αναδεικνύει την μαθηματική γνώση περισσότερο ως ένα χρήσιμο μέσον για την κατασκευή μοντέλων, παρά ως μία αυτοτελή, αξιωματικά θεμελιωμένη, θεωρία γνώσης.[1], [7] Η φύση της απόδειξης, φαίνεται να αλλάζει κι αυτή και να μην απαιτείται τόσο πολύ η εσωτερική δομή των μαθηματικών.[1]. Οι προβληματισμοί υπάρχουν. Από την άλλη, όλα τα εκτεθέντα πλεονεκτήματα του δυναμικού χειρισμού σχημάτων και αλγεβρικών παραστάσεων καθώς και η αντίστοιχη δυναμική οπτικοποίησή τους, σε σχέση με το επί χιλιετηρίδες χρησιμοποιούμενο στατικό μολύβι και χαρτί, δεν μπορούν πλέον να αγνοηθούν από κανέναν.

Βιβλιογραφία – Διαδίκτυο:

[1] : **Γαβρίλης Κωνσταντίνος, Κασιμάτης Νικόλαος, Παπαμιχάλης Κωνσταντίνος**,*Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί –Βιβλίο Καθηγητή* Εκδόσεις

Καστανιώτη Α.Ε. Διατίθεται εδώ: http://data.e-yliko.gr/softpackets/No168_Geometrikoi_Metasximatismoi/Geometrikoi_Metasximatismoi.zip

[2]:**Παντελίδης Γιώργος –Κραββαρίτης Δημήτριος** *Λεξικό Μαθηματικών,* Εκδόσεις Πατάκη (Μετάφραση –επεξεργασία του αντιστοίχου Γερμανικού, του οίκου Duden) Αθήνα 1997

[3]: http://el.wikipedia.org/wiki/Απολλώνιο_πρόβλημα

[4]: **Κυνηγός Χ., Δρ. Ψυχάρης Γ., Γαβρίλης Κ., Κεΐσογλου Σ.** Επιμοφωτικό υλικό για το Β΄ επίπεδο στους ΠΕ-03 «Ειδικό μέρος» Διατίθεται εδώ: http://www.pdfdownload.org/pdf2html/view_online.php?url=http%3A%2F%2F1gym-farsal.lar.sch.gr%2Fkse%2Feidiko_meros_pe3.pdf

[5]: **Lakatos Imre** «Αποδείξεις και Ανασκευές-Η λογική της Μαθηματικής Ανακάλυψης» Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα 1996

[6] : http://www.learning-theories.com/discovery-learning-bruner.html

[7] : http://www.lettredelapreuve.it